Algebraic local cohomology classes and Kouchnirenko's formulae (Recent development of microlocal analysis and asymptotic analysis)

田島, 慎一

数理解析研究所講究録
第1861巻 2013年 183-193

Algebraic local cohomology classes and Kouchnirenko's formulae

田島 慎一*(Shinichi TAJIMA)

§1. 序

X は $\mathbb{C}^n$ の原点 O の開近傍, $\mathcal{O}_X$ は X 上の正則関数のなす層, $\mathcal{O}_{X,O}$ は $\mathcal{O}_X$ の原点における茎 (stalk) を表すとする. 原点 O を孤立特異点として持つ複素解析的超曲面 S が X 上定義された正則関数 f の零点集合として与えられたとする: $S=\{x\in X\mid f(x)=0\}$. このような特異点の複素解析的な諸性質を調べる際, 局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ における f のヤコビイデアル J_f あるいはその剰余 $\mathcal{O}_{X,O}/J_f$ 等に対し, 種々の計算を実際に行うことが必要となることが多い.

さて, 佐藤超関数論と局所凸位相ベクトル空間に関する関数解析学の理論により, $\mathcal{O}_{X,O}$ の位相ベクトル空間としての双対ベクトル空間は, 原点 O に台を持つ局所コホモロジーとして実現できることが知られている. この双対性は多変数留数が定める pairing により与えられることに着目すると, 局所コホモロジーを用いることで局所環におけるイデアルメンバーシップの判定や standard 基底の構成, normal form の計算等, 様々な問題を扱う新たな方法を確立することが出来る.

孤立特異点が Newton 非退化な場合, その諸性質は Newton filtration を深く係っていることが知られている. Newton filtration は, Newton polygon の各々の facet が定める weight vector により定義されるため, Newton filtration は局所環における乗法や除法と両立するような term order とは相容れない. このことは, Newton 非退化な特異点を扱う際に通常の standard 基底や standard monomials 等を用いて計算することが適切でない可能性があることを意味すると考えられる. 本稿ではこの点に注目し, 局所コホモロジーを用いることで Newton 非退化な特異点の複素解析的な諸性質の研究に有効となる新たな枠組みの構築と計算手法を提案する.

2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 32S05; Secondary 32S30.
キーワード: Newton filtration, Tjurina stratification.
Supported by 科研費基盤研究 (C) 24540162.
*筑波大学数理物質系数学域

§2. 局所コホモロジーと双対性, イデアル商

X は, $\mathbf{C}^n$ の原点 O の開近傍, $\mathcal{O}_X$ は X 上の正則関数のなす層, Ω_X^n は X 上の n 次正則微分形式のなす層を表すとする.

原点 O に台を持つ局所コホモロジー群を $\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\Omega^n_X)$ で表し, 原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)$ を

$$\mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X) = \varinjlim_{k\to\infty} \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/(x_1,x_2,\ldots,x_n)^k, \Omega^n_X)$$

で定める. ただし $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ は $x_1,x_2,\ldots,x_n$ により生成される極大イデアルである.

局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\Omega^n_X)$ は Fréchet-Schwartz 位相ベクトル空間, 代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)$ は dual Fréchet-Schwartz 位相ベクトル空間の構造をそれぞれ持つ ([6], [12], [40]). さらに, $\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\Omega^n_X)$ は, 原点における収束冪級数のなす空間 $\mathcal{O}_{X,O}$ の双対ベクトル空間であり, $\mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)$ は, 形式冪級数のなす空間 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,O}$ の双対ベクトル空間である ([6], [12]). 双対性を定める pairing

$$\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\Omega^n_X) \times \mathcal{O}_{X,O} \to \mathbb{C}$$

および

$$\mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X) \times \hat{\mathcal{O}}_{X,O} \to \mathbb{C}$$

は共に, 多変数留数で与えられる.

X 上定義された正則関数 f であり, 超曲面 $S=\{x\in X \mid f(x)=0\}$ が原点 O を孤立特異点として持つものが与えられたとする. この時, f の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ が収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ において生成するイデアルを J_f, おなじく f の偏導関数が形式冪級数環 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,O}$ において生成するイデアルを $\widehat{J}_f$ で表す. さらに, $W_{J_f}, \widehat{W}_{J_f}$ をそれぞれ次で定める.

$$W_{J_f} = \{\omega \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\Omega^n_X) \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}\omega = \frac{\partial f}{\partial x_2}\omega = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\omega = 0\},$$
$$\widehat{W}_{J_f} = \{\omega \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X) \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}\omega = \frac{\partial f}{\partial x_2}\omega = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\omega = 0\}.$$

先程の位相ベクトル空間の双対性から導かれる次の pairing は, 共に非退化であることが知られている.

$$\mathrm{res}_O(\ ,\ )\colon \mathcal{O}_{X,O}/J_f \times W_{J_f} \to \mathbb{C},$$
$$\mathrm{res}_O(\ ,\ )\colon \widehat{\mathcal{O}}_{X,O}/\widehat{J}_f \times \widehat{W}_{J_f} \to \mathbb{C}.$$

ここで, $\mathrm{res}_0(\ ,\ )$ は, 多変数留数が定める pairing を意味する.

本稿の内容はすべてこの非退化性に基づくことで得られたものであるので, 非退化性について補足しておく. いま $h(x)\in\mathcal{O}_{X,O}$ が与えられたとする. この時, $\mathrm{res}_0(h,\omega)=0,\ \forall\omega\in W_{J_f}$

は $h(x) \in J_f$ となる必要十分条件となる．このことは即ち，W_{J_f} がイデアル J_f を完全に特徴つけていることを意味する ([33], [28], [38])．超曲面 S は原点 O を孤立特異点として持つことから，$W_{J_f} = \widehat{W}_{J_f}$ が従うことを注意しておく (以下，W_{J_f} と $\widehat{W}_{J_f}$ を区別しないで使用する)．

孤立特異点を持つ解析的超曲面に関する Mather-Yau [11] および Scherk [25] らの結果から，ヤコビイデアル J_f には，超曲面 S の特異点における複素解析的情報がすべて含まれていることがわかる (ただし [2] に注意)．このことは，ベクトル空間 $W_{J_f} = \hat{W}_{J_f}$ も超曲面 S の特異点における複素解析的情報をすべて含んでいることを意味することをここで注意しておく．

論文 [36], [38] 等において，代数的局所コホモロジー類がなすベクトル空間 $\widehat{W}_{J_f}$ の基底を構成するアルゴリズムを導出し，数式処理システムに実装した．

注意. ホモロジー代数の (米田 pairing を用いる) 通常の双対性定理では，$\mathcal{O}_{X,O}/J_f$ の双対ベクトル空間は，W_{J_f} ではなく，$Ext^n_{\mathcal{O}_{X,O}}(\mathcal{O}_{X,O}/J_f, \Omega^n_X)$ として与える．この ext 群の要素は Grothendieck symbol を用いて

$$\begin{bmatrix} h(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\cdots\dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

の形で表現するのが普通である．この時，

$$\mathcal{O}_{X,O}/J_f \times Ext^n_{\mathcal{O}_{X,O}}(\mathcal{O}_{X,O}/J_f, \Omega^n_X) \to \mathbb{C}$$

なる pairing は，

$$g(x) \in \mathcal{O}_{X,O}/J_f, \qquad \begin{bmatrix} h(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\cdots\dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in Ext^n_{\mathcal{O}_{X,O}}(\mathcal{O}_{X,O}/J_f, \Omega^n_X)$$

に対し，

$$\begin{aligned} &\mathrm{res}_O\left(g(x), \begin{bmatrix} h(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\cdots\dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right) \\ &\qquad = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \cdots \int_\gamma \frac{g(x)h(x)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\cdots\dfrac{\partial f}{\partial x_n}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

で与えられる．ここで γ は，十分小さな正の実数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ により，

$$\{x \in X \mid |\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)| = \varepsilon_1, |\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)| = \varepsilon_2, ..., |\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)| = \varepsilon_n\}$$

で定められる実 n 次元のサイクルである．以上が通常の local duality の概略であるが，この定式化では特異点の周りのサイクル γ の形状が複雑であるため，pairing を実際に計算することが容易ではない (多変数の Grothendieck local residues の値を求める計算アルゴリズムについては，論文 [34], [27] [29] 等を参照されたい).

それに比べ，$\mathcal{O}_{X,O}/J_f$ の双対ベクトル空間として，($Ext^n_{\mathcal{O}_{X,O}}(\mathcal{O}_{X,O}/J_f, \Omega^n_X)$ ではなく) 代数的局所コホモロジー類からなるベクトル空間 W_{J_f} を用いると，多変数留数が定める pairing の計算が，極めて容易となり，様々な計算や解析を実行できるようになる．

ベクトル空間 W_{J_f} は，ベクトル空間 $\mathcal{O}_{X,O}/J_f$ の双対ベクトル空間であることから，その次元 $\dim(W_{J_f})$ は $\dim(\mathcal{O}_{X,O}/J_f)$，即ち，特異点の位相的不変量である Milnor 数と一致する．そこで次に，特異点の解析的不変量である Tjurina 数について考える．

まず，正則関数 f とその偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ が収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ において生成するイデアルを T_f とおき，ベクトル空間 W_{T_f} を

$$W_{T_f} = \{\omega \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\Omega^n_X) \mid f\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1}\omega = \frac{\partial f}{\partial x_2}\omega = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\omega = 0\}$$

で定める．ベクトル空間 W_{T_f} は $\mathcal{O}_{X,O}/T_f$ の双対ベクトル空間であり，その次元は Tjurina 数と等しい．

今，W_{J_f} から W_{J_f} 自身への写像 $\varphi\colon W_{J_f} \to W_{J_f}$ を $\varphi(\omega) = f\omega$ で定めると，明らかに，$\mathrm{Ker}(\varphi) = W_{T_f}$ が成り立つ．また，

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{f\omega \mid \omega \in W_{J_f}\}$$

は，イデアル商 $Q_f = \{h \in \mathcal{O}_{X,O} \mid hf \in J_f\}$ により annihilate される局所コホモロジー類 $\omega \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\Omega^n_X)$ のなす集合と一致する．そこで，$W_{Q_f} = \mathrm{Im}(\varphi)$ とおくことにする．

いままでのことから，次の完全列を得る．

$$0 \to W_{T_f} \to W_{J_f} \to W_{Q_f} \to 0.$$

この完全列に関連し，いくつかの事柄を以下に述べる．

1971 年に発表された論文 [24] において斎藤恭司は，孤立特異点を持つ正則関数 f (の germ) が解析的座標変換を局所的に施すことで，weighted homogeneous な多項式として表せるようなそのような局所解析的座標変換が存在することと，f が局所環におけるヤコビイデアル J_f に属すことが同値であることを示した．このことは，f が複素解析的に weighted homogeneous な多項式と同等であるか否かということを f の ideal membership 問題を解くことで判定できるということを意味することになる．

さて一般に，局所環での ideal membership の判定を行うには，通常は先ず，Mora のアルゴリズム等を用いてイデアルのスタンダード基底を構成し，次に局所環における剰余計算を行

い，その結果として得られる剰余を用いて membership の判定を行うことが必要となる．局所環でのこれらの計算は，多項式環の場合と比べ剰余計算が難しいため，決して容易ではない．

本稿で先程述べたのは，超曲面の定義関数 f がそのヤコビイデアル J_f に属すか否かという ideal membership 問題であった．正則関数 f が J_f に属すか否かは，ふたつのイデアル J_f と T_f が等しいか否かという問題と同値であるが，このことを局所コホモロジーの概念を使って表現すれば, $\mathrm{Im}(\varphi)=0$ か否かという問題とまったく等価である．ベクトル空間 W_{J_f} の基底代数的局所コホモロジー類に f を掛けることは簡単な計算であるので，代数的局所コホモロジーを使うことで，ideal membership 問題が極めて容易に解けることが分かる (この判定法は，論文 [13], [32] 等で既に用いていたことを注意しておきたい).

ベクトル空間 W_{Q_f} は，正則関数 f がどの程度擬斉次でないかを，代数的局所コホモロジー類により表しているものと考えることができる．実際，特異点の Milnor 数を μ, Tjurina 数を τ とおくと，$\dim(W_{Q_f})=\mu-\tau$ であり，しかも局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ における W_{Q_f} の annihilator $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(W_{Q_f})$ はイデアル商 $Q_f=\{h\in\mathcal{O}_{X,O}\mid hf\in J_f\}$ と等しい．このベクトル空間 W_{Q_f} は，写像 φ の像集合であり，W_{J_f} の基底を f 倍することで容易に計算できることに注目されたい．

§3. 半擬斉次特異点と weight vector, Tjurina stratifications

半擬斉次孤立特異点の諸性質は，その擬斉次部の weight vector と密接な関係があることが知られている．従って，代数的局所コホモロジー類を用いて半擬斉次孤立特異点の性質を解析する際も，予め代数的局所コホモロジーの空間に weight vector と両立するような項順序を入れ，その項順序を利用しながら様々な計算や解析を行うことが望まれる．

さて, 孤立特異点を定める正則関数 f は，半擬斉次多項式であるとする．このときベクトル空間 W_{J_f} 自体は，weight vector や局所環上の項順序に依ることなく定義されるが，W_{J_f} の基底ベクトルの選び方やその構成法は，weight vector や項順序の定め方に依存する．

この節では，先ず，E_{12} 特異点の例を用いて，ベクトル空間 W_{J_f} の (ベクトル空間としての) 基底で，weight vector と両立しないような項順序に関する基底を用いるとどのような不都合が生じるかを示し，weight vector と両立するような項順序を使用することの理由を説明する．また，μ-constant deformation に対する Tjurina stratification への応用について紹介する．

例 3.1. E_{12} 特異点 $f(x,y)=x^3+y^7+axy^5$ $(a\neq 0)$ を考える．項順序として total lex order を用いて W_{J_f} の基底代数的局所コホモロジー類を求めると

$$[\frac{1}{xy}],\ [\frac{1}{xy^2}],\ [\frac{1}{x^2y}],\ [\frac{1}{xy^3}],\ [\frac{1}{x^2y^2}],\ [\frac{1}{xy^4}],\ [\frac{1}{x^2y^3}],\ [\frac{1}{xy^5}],\ [\frac{1}{x^2y^4}],$$
$$[\frac{1}{xy^6}]-\frac{1}{3}a[\frac{1}{x^3y}],\ [\frac{1}{xy^7}]-\frac{7}{5a}[\frac{1}{x^2y^5}]-\frac{a}{3}[\frac{1}{x^3y^2}],$$

$$[\frac{1}{xy^8}] - \frac{7}{5a}[\frac{1}{x^2y^6}] - \frac{a}{3}[\frac{1}{x^3y^3}] + \frac{7}{15}[\frac{1}{x^4y}],$$

を得る (ただし，微分形式 $dx \wedge dy$ を省略してある)．ここで用いた計算法では，項順序に関し，主項となる項の係数が 1 となるように規格化して計算を行っている．この項順序を用いて得た基底は，a の値が零の時は，意味をなさないことに注意されたい．このようなことは，$a=0$ の時は，例えば W_{J_f} に属す代数的局所コホモロジー類は $[\frac{1}{xy^7}]$ や $[\frac{1}{xy^8}]$ を主項として持ちえないことから生じたと理解できる．

例 3.2. 再び，E_{12} 特異点 $f(x,y)=x^3+y^7+axy^5$ について考える．$f(x,y)$ は，(7,3) を weight vector とすると，x^3+y^7 の weighted degree が 21, xy^5 の weighted degree が 22 であることから，x^3+y^7 を擬斉次部とする半擬斉次多項式と見做せる．そこで，項順序として weight weight (7,3) と両立する term order を用いて W_{J_f} の基底代数的局所コホモロジー類を求める．次を得る．

$$[\frac{1}{xy}],\ [\frac{1}{xy^2}],\ [\frac{1}{x^2y}],\ [\frac{1}{xy^3}],\ [\frac{1}{x^2y^2}],\ [\frac{1}{xy^4}],\ [\frac{1}{x^2y^3}],\ [\frac{1}{xy^5}],\ [\frac{1}{x^2y^4}],$$

$$[\frac{1}{xy^6}] - \frac{1}{3}a[\frac{1}{x^3y}],\ [\frac{1}{x^2y^5}] - \frac{5a}{7}[\frac{1}{xy^7}] + \frac{5a}{21}[\frac{1}{x^3y^2}],$$

$$[\frac{1}{x^2y^6}] - \frac{5a}{7}[\frac{1}{xy^8}] - \frac{a}{3}[\frac{1}{x^4y}] + \frac{5a^2}{21}[\frac{1}{x^3y^3}]$$

この基底代数的局所コホモロジー類は，$a=0$ の場合も意味を持つことに注意されたい．

上記の例に限らず，半擬斉次孤立特異点の場合，代数的局所コホモロジーの空間に weight vector と両立する項順序をいれ，その項順序が定める W_{J_f} の基底を考えると，論文 [15] で示したように，基底代数的局所コホモロジー類の主項が upper monomials の係数に依らず一定であることが分かる．また，これら，基底代数的局所コホモロジー類の主項の weighted degree は Poincaré 多項式から求めることが出来る．論文 [18], [20] 等では，これらの性質に着目することで，半擬斉次孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジー類を構成するアルゴリズムを導出，プログラムの実装を行った．

さて，E_{12} 特異点の定義多項式に含まれる係数 a は，今迄は定数とみなしていたが，ここで a を特異点の変形を与えるパラメータであると解釈してみる．この特異点の変形では Milnor 数は一定であるので，$f(x,y)=x^3+y^7+axy^5$ は，所謂 μ-constant deformation を与えていることになる．

これより，孤立特異点を定める擬斉次多項式に upper monomials を加えることで得られるような半擬斉次多項式からなる μ-constant deformations に関し，最近得た結果について簡単に紹介する．そのために，先ず，いくつか記号等と準備する．

X は，$\mathbf{C}^n$ の原点 O の開近傍，変形パラメータ t の動く空間 T は，$\mathbf{C}^\ell$ の原点の開近傍とする．$X \times T$ 上の正則関数 $F(x,t)$ であり，擬斉次孤立特異点を定める多項式 $f(x)$ の μ-constant deformation を定めるものが与えられたとする (変数 t をパタメータと見做し $f_t(x)=F(x,t)$ なる記号を用いる). 即ち, F は以下の条件をみたすものとする.

(i) $f(x)=f_0(x)$, 即ち, $f(x)=F(x,0)$.

(ii) 超曲面 $f_t(x)=F(x,t)=0$ の原点における Milnor 数は, $f(x)=0$ の Milnor 数と一致.

このとき, 一般に, 超曲面族 $f_t(x)=0$ の Tjurina 数はパラメータ t と共に変化する ([8], [10]). 以下に, Tjurina 数のパラメータ依存性を解明するための枠組みを紹介する.

正則パラメータを持つ代数的局所コホモロジー

$X\times T$ 上の微分形式であり, $h(x,t)dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$ なる形をした (正則関数 $h(x,t)$ を係数に持ち, t を正則パラメータとして持つ) n 次正則微分形式の成す層を $\Omega^{(n,0)}_{X\times T}$ とおき, $V=\{O\}\times T$ に台を持つ n 次の局所コホモロジー群を $H^n_V(\Omega^{(n,0)}_{X\times T})$ で表す.

いま, W_F を次で定める.

$$W_F=\{\omega\in H^n_V(\Omega^{(n,0)}_{X\times T})\mid \frac{\partial F}{\partial x_1}\omega=\frac{\partial F}{\partial x_2}\omega=\cdots=\frac{\partial F}{\partial x_n}\omega=0\}.$$

W_F の要素 ω は, 正則パラメータ t を持つ $H^n_O(\Omega^n_X)$ の元と見做すことができ, 各 t 毎に, $\omega_t\in H^n_O(\Omega^n_X)$ を定める. そこで, 各 $t\in T$ に対し, $W_{f_t}=\{\omega_t\mid\omega\in W_F\}$ とおく.

さて, 関数 $f_t(x)=F(x.t)$ の収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ におけるヤコビイデアルを J_{f_t} で表す. Grothendieck 留数は, 次の非退化な pairing を定める

$$\mathrm{res}\colon W_{f_t}\times\mathcal{O}_{X,O}/J_{f_t}\to\mathbf{C}.$$

即ち, W_{f_t} は $\mathcal{O}_{X,O}/J_{f_t}$ の双対ベクトル空間である.

これらの事柄に着目し, 論文 [18], [30] において, 半擬斉次多項式からなる μ-constant deformations に付随する parameter 付代数的局所コホモロジーの計算アルゴリズムを導出した. また, 論文 [31], [19] では, 変形パラメータ付の完全列

$$0\to W_{T_{f_t}}\to W_{J_{f_t}}\to W_{Q_{f_t}}\to 0$$

に注目することで, μ-constant deformation に対する Tjurina stratification を求めるアルゴリズムを導出・実装した.

§4. 局所コホモロジーと Newton filtrations

半擬斉次孤立特異点の場合, 特異点の諸性質と擬斉次部が定める weight vector との間に密接な関係があることに呼応し, Newton 非退化な孤立特異点の諸性質は, Newton filtration と深く係っていることが知られている. 従って, 特異点に付随する代数的局所コホモロジー類

を用いて特異点の解析を行う際も，Newton filtration が定める構造に応じたやり方で計算や解析等を行うことが肝要となる．しかし，本稿の序にも述べたように Newton filtration は，局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ における如何なる term order とも両立しない．ところが，論文 [16], [36], [38] 等で与えた孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジー類を求める計算アルゴリズムはいずれも，局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ における項順序に対応するような項順序を代数的局所コホモロジーの空間に入れ，その項順序のもとで計算を行うものとして導出した算法である．しかも，項順序を積極的に利用することで計算効率の良いアルゴリズムを構成してある．そのため，Newton 非退化な特異点を扱うためには，従来とは大きく異なる考え方で代数的局所コホモロジー類の計算方法を導出する必要がある．もうひとつの大きな困難は，ヤコビイデアル J_f は，定義関数の導関数により生成されるイデアルであるため，J_f 自体は，Newton filtration との相性が極めて悪いということにある．

この節では，ヤコビイデアルではなく別のイデアルに付随する代数的局所コホモロジー類のなすベクトル空間を導入することで，上に述べたような様々な困難を克服することができることを紹介する．

以下，$f(x)$ は，原点を Newton 非退化な特異点として持つ正則関数であるとする．$f(x)$ に対し，$x_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, x_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, x_n\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ が局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ において生成するイデアル I_f を考える:

$$I_f = (x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}, x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

このイデアルに対応して，ベクトル空間 W_{I_f} を次で定める．

$$W_{I_f} = \{\omega \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\Omega^n_X) \mid x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\omega = x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\omega = \cdots = x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\omega = 0\}.$$

ここで，W_{I_f} から W_{I_f} 自身への写像 $\pi\colon W_{I_f} \to W_{I_f}$ を $\pi(\omega) = x_1x_2\cdots x_n\omega$ で定める．このとき，$\mathrm{Im}(\pi) \subset W_{J_f}$ が成り立つが，更に次が成立する．

命題 4.1. f は，Newton 非退化で commode であるとする．このとき次が成り立つ．

$$\mathrm{Im}(\pi) = W_{J_f}.$$

この結果を用いると，Milnor 数に関する Kouchnirenko の公式 ([7]) を導くことができる．

注意. (i) Newton filtration と両立するベクトル空間 W_{I_f} の基底を，効率よく求めることができる．

(ii) 上記の命題から，ベクトル空間 W_{I_f} の基底を求め，その結果を用いてベクトル空間 W_{J_f} の基底を構成することが可能となる．

(iii) イデアル I_f は，Kouchnirenko [7] が導入したものである．このイデアルに対応する局所コホモロジー類からなるベクトル空間 W_{I_f} を導入することで，Newton 非退化な孤立特異点の複素解析的性質を調べようというのが本稿の基本的考え方である．

さて, Tjurina 数の解析の際に, 写像 $\varphi\colon W_{J_f} \to W_{J_f}$ を導入したのと同様に, W_{I_f} から W_{I_f} 自身への写像 $\varphi\colon W_{I_f} \to W_{I_f}$ を $\varphi(\omega) = f\omega$ で定め, $\mathrm{Ker}(\varphi) = W_{S_f}$ とおく. また,

$$W_{P_f} = \mathrm{Im}(\varphi) = \{f\omega \mid \omega \in W_{I_f}\}$$

とおくことにする.

注意. 写像 $\varphi\colon W_{I_f} \to W_{I_f}$ は, $\varphi\colon W_{J_f} \to W_{J_f}$ に比べ, 数学的構造が簡明である. ベクトル空間 $W_{P_f} = \mathrm{Im}(\varphi)$ の方が, W_{Q_f} より構造の解析が楽にできる.

次の完全列を得る.

$$0 \to W_{S_f} \to W_{I_f} \to W_{P_f} \to 0.$$

さらに, 写像 $\pi\colon W_{I_f} \to W_{I_f}$ と同様に W_{P_f} から W_{P_f} 自身への写像 $\pi\colon W_{P_f} \to W_{P_f}$ を $\pi(\omega) = x_1x_2\cdots x_n\omega$ で定める.

命題 4.2. f は, Newton 非退化で commode であるとする. このとき,

$$\mathrm{Im}(\pi\colon W_{P_f} \to W_{P_f}) = W_{Q_f}$$

が成り立つ.

この命題を用いると

$$\mu - \tau = \dim(\pi(\varphi(W_{I_f})))$$

を得る.

ベクトル空間 W_{I_f} を用いることで, 特異点の複素解析的不変量である $\mu - \tau$ を求める新たな計算法を導くことが出来たことになる.

本稿では, ベクトル空間 W_{I_f}, W_{J_f} の基底の計算法, W_{P_f}, W_{Q_f} の計算例, Tjurina 数への応用等について触れることが出来なかった. これらについては, 機会を改めて述べることにしたい.

参考文献

[1] 阿部隆行, 田島慎一, 孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーとヤコビイデアルに対するグレブナー基底の計算法, *Computer Algebra–Design of Algorithms, Implementations and Applications*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1514**, 2006, pp. 141–147.

[2] Benson, M. and Yau, S. S.-T., Equivalences between isolated hypersurface singularities, *Math. Ann.* **287** (1990), 107–134.

[3] Bibià-Ausina, C., Fukui, T. and Saia, M. J., Newton filtrations, graded algebras and codimension of non-degenerate ideals, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **133** (2002), 55–75.

[4] Damon, J. and Gaffney, T., Topological triviality of deformations of functions and Newton filtrations, *Invent. Math.* **72** (1983), 335–358.

[5] Griffiths, P. and Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience Pub., 1978.

[6] Komatsu, H., Relative cohomology of sheaves of solutions of differential equations, *Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations*, Proceedings Katata 1971 (H. Komatsu, ed.), *Lecture Notes in Math.* **287**, Springer, 1973, pp. 192–261.

[7] Kouchnirenko, A. G., Polyèdre de Newton et nombres de Milnor, *Invent. Math.* **32** (1976), 1–31.

[8] Laudal, O. A. and Pfister, G., *Local Moduli and Singularities*, *Lecture Notes in Math.* **1310**, Springer, 1988.

[9] Martin, B. and Pfister, G., Milnor number of complete intersections and Newton polygons, *Math. Nachr.* **110** (1983), 159–177.

[10] ———, The kernel of the Kodaira-Spencer map of the versal μ-constant deformation of an irreducible plane curve with C^*-action, *J. Symbolic Comp.* **7** (1989), 527–531.

[11] Mather, J. N. and Yau, S. S.-T., Classification of isolated hypersurface singularities by their moduli algebra, *Invent. math.* **69** (1982), 243–251.

[12] Morimoto, M., *An Introduction to Sato's Hyperfunctions*, Transl. Math. Monogr. **129**, 1993, AMS.

[13] 中村弥生, 田島慎一 , Unimodal 例外型特異点における代数的局所コホモロジー類, 微分方程式の漸近解析と超局所解析, 京都大学数理解析研究所講究録 **1211**, 2001, pp. 155–165.

[14] ———, Inner modality 4 以下の半擬斉次孤立特異点に付随したホロノミック系について, 超局所解析とその周辺, 京都大学数理解析研究所講究録 **1431**, 2005, pp. 55–67.

[15] ———, On weighted-degrees for algebraic local cohomologies associated with semiquasihomogeneous singularities, *Adv. Stud. Pure Math.* **46** (2007), 105–117.

[16] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一 , 代数的局所コホモロジーの計算法とそれを用いたスタンダード基底・グレブナ基底計算について, 実閉体上の幾何と特異点論への応用, 京都大学数理解析研究所講究録 **1764**, 2011, pp. 102–125.

[17] ———, パラメータ付き零次元代数的局所コホモロジーを用いたパラメトリック・スタンダード基底計算について, *Computer Algebra*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1814**, 2012, pp. 43–53.

[18] 鍋島克輔, 田島慎一, パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算について —半擬斉次孤立特異点の場合—, *Computer Algebra — The Algorithms, Implementations and the Next Generation —*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1785**, 2012, pp. 111—122.

[19] ———, μ-constant deformation に対する代数的局所コホモロジーと Tjurina stratification, *Computer Algebra*, 京都大学数理解析研究所講究録, 掲載予定

[20] ———, On the computation of algebraic local cohomology classes associated with semiquasihomogeneous singularities, to appear in *Adv. Studies in Pure Math.*

[21] Oka, M., On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary, *J. Math. Soc. Japan* **31** (1979), 435–450.

[22] Saia, M., The integral closure of the ideals and the Newton filtration, *J. Algebraic Geom.* **5** (1996), 1–11.

[23] Saia, M. and Tomazella, J., Deformations with constant Milnor number and multiplicity of complex hypersurfaces, *Glasgow Math. J.* **46** (2004), 121–130.

[24] Saito, K., Quasihomogene isolierte Singularitaten von Hyperflächen, *Invent. Math.* **14** (1971), 123–142.

[25] Scherk, J., A propos d'un théoreme de Mather et Yau, *C. R. Acad. Sci. Paris* **296** (1983), 513–515.

[26] Steenbrink, J. H. M., Mixed Hodge structures associated with isolated singularities, *Real and Complex Singularities, Oslo* 1976, 1976, pp. 525–563.

[27] 田島慎一, Noether 作用素と多変数留数計算アルゴリズム, 超局所解析とその周辺, 京都大学数理解析研究所講究録 **1431**, 2005, pp. 123–136.

[28] ———, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について, *Computer Algebra–Design of Algorithms, Implementations and Applications*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1456**, 2005, pp. 126–132.

[29] ———, 多変数留数の計算代数解析とホロノミー D 加群, 情報物理学の数学的構造, 京都大学数理解析研究所講究録 **1532**, 2007, pp. 43–59.

[30] ———, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II, *Computer Algebra*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1568**, 2007, pp. 74–80.

[31] ———, Parametric local cohomology classes and Tjurina stratifications for μ-constant deformations of quasi-homogeneous singularities, *to appear.*

[32] 田島慎一, 中村弥生, Milnor algebra に付随した holonomic 系について, 微分方程式論における積分公式と Twisted cohomology, 京都大学数理解析研究所講究録 **1212**, 2001, pp. 133–143.

[33] ———, Algebraic local cohomology classes attached to quasi-homogeneous hypersurface isolated singularities, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 1–10.

[34] ———, Computational aspects of Grothendieck local residues, *Singularités Franco-Japonaises* (J.-P. Brasselet and T. Suwa, eds), *Sémin. Congr.* **10**, Soc. Math. France, 2005, pp. 287–305.

[35] ———, On holonomic D-modules attached to Reiffen's hypersurface isolated singularities, *Modern Mathematics and its Applications* **54** (2008), 124–132, in Russian; English translation: On holonomic D-modules attached to Reiffen's hypersurface isolated singularities, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **158** (2009), 288–296.

[36] ———, Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class, *J. Symbolic Comput.* **44** (2009), 435–448.

[37] ———, Algebraic local cohomology classes attached to unimodal singularities, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **48** (2012), 21-43.

[38] Tajima, S, Nakamura Y. and Nabeshima, K., Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, *Adv. Studies in Pure Math.* **56** (2009), 341–361.

[39] Teissier, B., Monômes, volumes et multiplicités, *Introduction à la Théorie des Singularités,* II, *Travaux en Cours* **33**, Herman, 1988, 127–141.

[40] Treves, F., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, 1967.

[41] Varchenko, A. N. and Hovanskii, A. G., Asymptotics of integrals over vanishing cycles and the Newton polyhedron, *Sov. math. Dokl.* **32** (1985), 122–127.

[42] Wall, C. T. C., Newton polytopes and non-degeneracy, *J. Reine Angew. Math.* **509** (1999), 1–19.

[43] Yoshinaga, E., Topologically principal part of analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **314** (1989), 803–814.